

Задаци за припрему ученика за такмичење грађевинских и
геодетских школа - математика

1. Круг k уписан у правоугли троугао ABC додирује катете AC и BC у тачкама P и Q . Ако је $AC=30\text{cm}$ и $BC=40\text{cm}$, онда је површина фигуре ограничене дужима PC, QC и мањим од лукова PQ круга k једнака (у cm^2):
- A) 10π Б) $100-25\pi$ В) 8π Г) $60\pi-160$ Д) $8+6\pi$
2. Кроз тачку у троуглу ABC повучене су праве паралелне страницама троугла. На тај начин формирана три мања троугла чије су површине $1,4$ и 9 . Површина троугла ABC је:
- A) 36 Б) 64 В) 48 Г) 24 Д) 27
3. Руда садржи 40% примеса. Метал добијен из ове руде садржи 4% примеса. Колико се добија метала из 24 тоне ове руде(у тонама)?
- A) 12 Б) 13 В) 14 Г) 15 Д) $15,5$
4. Ако је полином $P(x)=x^4+ax^2+bx+c$ дељив полиномом $Q(x)=x^3-3x^2+3x-1$, онда је $2a+2b+c$ једнако:
- A) -12 Б) -6 В) 0 Г) 1 Д) 8
5. Полином $P(x)=x^4+ax^2+bx+c$ при дељењу са $x-1$ даје остатак 2 , при дељењу са $x+1$ даје остатак -2 , а при дељењу са $x-2$ даје остатак 25 . Остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $x+2$ једнак је:
- A) -12 Б) 12 В) -13 Г) 13 Д) 17
6. Вредност израза $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) \cdot \frac{3\sqrt{3}+3}{4}$ једнака је:
- A) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ Б) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ В) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ Г) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ Д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. Ако је $ab \neq 0$ и $a \neq b$, израз $\left(\frac{(a-b)^2}{ab} + 3\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{a^3 - b^3}{ab}$ једнак је изразу:

- A) $a^2 + ab + b^2$ Б) $a - b$ В) $a + b$ Г) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ Д) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

8. Збир свих целобројних решења неједначине $\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4x - 5} < 1$ је

- A) 6 Б) 2 В) 4 Г) 10 Д) 8

9. Комплексних бројева $z = x + iy$ таквих да је $|z - 2i| + \bar{z} = 3 + 2i$ има:

- A) 2 Б) 4 В) 0 Г) 1 Д) 3

10. Ако за комплексан број $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$, $i^2 = -1$) важи $|z - 1 - i| + \bar{z} = 3 - 2i$, онда је $4x - y$ једнако:

- A) 4 Б) 5 В) 6 Г) 8 Д) 10

11. Имагинарни део комплексног броја $(1+i)^{2009}$, где је $i^2 = -1$, једнак је :

- A) $2^{2008} i$ Б) $-2^{2008} i$ В) -2^{1004} Г) 2^{1004} Д) 2^{2008}

12. Број решења једначине $|4x^2 - 5x| = |x - 2|$ једнак је:

- A) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 5

13. Ако су x_1 и x_2 ($x_1, x_2 \neq -1$) решења једначине $x^2 + px + q = 0$, онда је $\frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2}$ једнако:

- A) $\frac{2q+p}{1+p+q}$ Б) $\frac{q-2p}{-p+q}$ В) $\frac{q-p}{p+q}$ Г) $\frac{2q-p}{1-p+q}$ Д) $\frac{q-2p}{1+p-q}$

14. Скуп свих вредности реалног параметра m , таквих да једначина $x^2 + 4mx + 4m^2 + 4m = 0$ има позитивна и међусобно различита решења, једнак је:

- A) $(-\infty, 0)$ Б) $(-1, 0)$ В) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ Г) $(0, +\infty)$ Д) $(-\infty, -1)$

15. Нека је m природан број. Збир свих вредности параметра m за које је квадратни трином $(6-m)x^2 + (12-2m)x + 15-3m$ позитиван $\forall x \in \mathbf{R}$ једнак је:

A) 9 Б) 15 В) 3 Г) 10 Д) 6

16. Скуп решења неједначине $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3} \geq 1$ је:

A) $(\infty, -1] \cup (3, +\infty)$ Б) $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$ В) $(-1, +\infty)$ Г) $[3, +\infty)$ Д) $(-1, 3)$

17. Једначина $|x^2 - 2x - 3| = a, a \in R$ има максималан број различитих реалних решења ако и само ако вредности реалног параметра a припадају

A) $(-\infty, -4]$ Б) $(-4, 0]$ В) $(0, 4)$ Г) $(-\infty, +\infty)$ Д) $[4, +\infty)$

18. Збир решења једначине $\sqrt{2x+4} + \sqrt{2x+1} = 3$ једнак је:

A) 0 Б) 1 В) -1 Г) 2 Д) -2

19. Број реалних решења једначине $\sqrt{2x+14} - \sqrt{x-7} = \sqrt{x+5}$ је:

A) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) 4

20. Скуп решења неједначине $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < 4x$ је:

A) $(-\infty, -\frac{3}{5}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ Б) $(-\infty, -\frac{3}{5})$ В) $(-\infty, -\frac{3}{5}) \cup (3, +\infty)$ Г) $(\frac{1}{3}, 1] \cup [3, +\infty)$ Д) $(-\frac{3}{5}, \frac{1}{3})$

21. Скуп свих решења неједначине $5(\frac{1}{5})^{2x} - 6(\frac{1}{5})^x + 1 < 0$ садржан је у скупу:

A) $(\frac{3}{2}, +\infty)$ Б) $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ В) $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ Г) $(-\infty, \frac{1}{5})$ Д) $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{4}, +\infty)$

22. Производ квадрата решења једначине $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ једнак је

A) 0 Б) 2 В) 4 Г) $\frac{1}{4}$ Д) 5

23. Збир квадрата решења једначине $(19 + 6\sqrt{10})^x + (19 - 6\sqrt{10})^x = 38$ је:

A) 0 Б) 2 В) 8 Г) 4 Д) 1

24. Збир целих бројева за које је тачна неједнакост $\log_4 x \leq \log_{16} (4x + 5)$ једнак је:

A) 18 Б) 14 В) 15 Г) 6 Д) 16

25. Скуп свих решења неједначине $\log_x(4-x^2) < 2$ је:

A) $(\sqrt{2}, 2)$ Б) $(1, \sqrt{2})$ В) $(0, 1)$ Г) $(0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$ Д) $(0, 1) \cup (\sqrt{2}, 2)$

26. Број решења једначине $2\cos^2 x - 3\sin x = 3$ која припадају интервалу $[-\pi, \pi]$ једнак је

A) 3 Б) 4 В) 6 Г) 0 Д) 2

27. Број решења једначине $\sin\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right) = 1$ је:

A) већи од 10 Б) 5 В) 7 Г) 0 Д) 6

28. Број решења једначине $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$, која припадају сегменту $[0, 2\pi]$ једнак је:

A) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 5

29. Ако је $\operatorname{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$, $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ онда је $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$ једнако:

A) $1 + \sqrt{3}$ Б) $2\sqrt{3} - 3$ В) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$ Г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ Д) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$

30. Ако је дужина ивице правилног тетраедра једнака 9 cm, онда његова висина има дужину (у cm):

A) $4\sqrt{3}$ Б) $3\sqrt{6}$ В) $9\sqrt{3}$ Г) 7 Д) $2\sqrt{6}$

31.

Ако су странице троугла ABC, AB=5, BC=6, AC=9, тада је полупречник описаног круга тог троугла:

A) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ Б) $\frac{22}{3}$ В) $\frac{27\sqrt{2}}{8}$ Г) $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ Д) $2\sqrt{6}$

32.

Угао између изводнице и висине праве кружне купе је 60° , а разлика њихових дужина је 3 m.

Запремина те купе (у m^3) је:

A) $24\sqrt{3}\pi$ Б) 30π В) 9π Г) 18π Д) 27π

33. Максимална запремина ваљка уписаног у сферу полупречника R је:

- А) $\frac{2}{3}R^3\pi$ Б) $\frac{2}{3\sqrt{3}}R^3\pi$ В) $\frac{16}{27}R^3\pi$ Г) $\frac{4}{3\sqrt{3}}R^3\pi$ Д) $\frac{1}{\sqrt{2}}R^3\pi$

34. Однос висина две једнакоивичне тростране пирамиде је 1:2, а ивица мање пирамиде је $a = \sqrt{6}$. Површина веће пирамиде је:

- А) $24\sqrt{3}$ Б) $30\sqrt{3}$ В) $12\sqrt{3}$ Г) $16\sqrt{3}$ Д) $20\sqrt{3}$

35. У лопту полупречника R уписана је коцка. Запремина коцке је:

- А) $\frac{8}{3}R^3$ Б) $\frac{2\sqrt{3}}{9}R^3$ В) $\frac{8\sqrt{3}}{9}R^2$ Г) $\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$ Д) $\frac{4\sqrt{3}}{9}R^3$

36. Ако је α угао између страна ABC и ABD правилног тетраедра ABCD, онда је збир $\sin\alpha + \cos\alpha$ једнак:

- А) $\frac{1}{\sqrt{3}}(2 + \sqrt{2})$ Б) $\frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{2})$ В) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$ Г) $2(\sqrt{2} - 1)$ Д) $\frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{3})$

37. У праву купу полупречника основе $r = 5\text{cm}$ и висине $H = 12\text{cm}$ уписана је лопта. Запремина лопте је:

- А) $\frac{400\pi}{9}\text{cm}^3$ Б) $\frac{4000\pi}{81}\text{cm}^3$ В) $\frac{1000\pi}{27}\text{cm}^3$ Г) $\frac{4000}{81}\text{cm}^3$ Д) $\frac{400}{9}\text{cm}^3$

38. Око круга пречника 15 cm описан је једнакокраки траpez чија је дужина крака 17 cm. Мања основица трапеza једнака је:

- А) 6 cm Б) 12 cm В) 9 cm Г) 10 cm Д) 8 cm

39. Растојање пресечне тачке правих $x+2y=10$ и $3x-2y=2$ од центра кружне линије $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ је:

- А) 2 Б) 3 В) 5 Г) 7 Д) 8

40. Тачка симетрична тачки $M(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ у односу на праву $x - 3y - 4 = 0$ је:

- А) (2,-3) Б) $(\frac{8}{5}, -\frac{14}{5})$ В) $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ Г) (2,-4) Д) $(\frac{5}{3}, -3)$

41. Права p додирује елипсу $4x^2 + 9y^2 = 72$ у тачки (3,2), а права q додирује кружницу $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 2$ у тачки (4,4). Праве p и q секу координатне осе у тачкама A, B, C и D, где A и B припадају оси Oх, а C и D оси Oу. Површина четвороугла ABCD једнака је:

A) 10 Б) 20 В) 30 Г) $\frac{39}{2}$ Д) $\frac{19}{2}$

42. Дужина тетиве кружне линије $(x-3)^2 + y^2 = 5$ коју на њој одређује симетрала првог и трећег квадранта једнака је:

A) 2 Б) 5 В) $\sqrt{5}$ Г) $\sqrt{10}$ Д) $\sqrt{2}$

43. Збир првих пет чланова аритметичког низа је 1, а збир следећих пет чланова једнак је 11. Тридесети члан овог низа једнак је:

A) 11 Б) 17 В) 8 Г) 14 Д) 5

44. Збир свих троцифрених бројева дељивих са 11 износи:

A) 33660 Б) 40733 В) 41624 Г) 44550 Д) 53031

45. Збир првог и четвртог члана растуће геометријске прогресије је 35, а збир њеног другог и трећег члана је 30. Пети члан прогресије је:

A) $\frac{81}{2}$ Б) $\frac{63}{2}$ В) 39 Г) $\frac{125}{2}$ Д) 45

46. Збир квадрата најмање и највеће вредности функције $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$ на сегменту $[-1,2]$ износи:

A) 41 Б) 40 В) 42 Г) 50 Д) 52

47. У круг полупречника 12 cm уписан је правоугаоник максималне површине. Та је површина (у cm^2) једнака:

A) $144\sqrt{2}$ Б) 288 В) $144\sqrt{3}$ Г) 264 Д) 312

48. Ако је $f(x)=2^{3x}$ и $g(x)=\log_2 x$, онда је $x^2g(f(x))-f(g(x))$ једнако:

A) $2x^2$ Б) $2x^3$ В) $3x^3$ Г) $3x^2$ Д) 3

49. Ако је $f(x)=\frac{1}{x}$ и $g(x)=\frac{x+1}{x-2}$ онда је $g(f(3))-f(g(-2))$ једнако:

A) $\frac{3}{4}$ Б) $\frac{4}{3}$ В) $-\frac{24}{5}$ Г) $-\frac{3}{4}$ Д) 1

50. Регистарске таблице возила за одређени град садрже два слова наше азбуке која се поклапају са неким од слова енглеске абецедe (таквих слова је 12). Колико најмање цифара треба да садрже таблице за тај град да би број регистрованих возила био већи од 1000000?

- A) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5 Д) 6

51. Број пресечних тачака свих дијагонала унутар конвексног седмоугла ABCDEFG, код којег се никоје три и више дијагонала не секу у једној унутрашњој тачки тог седмоугла, једнак је:

- A) 21 Б) 28 В) 35 Г) 42 Д) 45

52. Природних бројева n , $10 \leq n < 10000$, у чијем декадном запису никоје две суседне цифре нису једнаке, има:

- A) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ Б) $9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8$ В) $9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8$ Г) $9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ Д) $9 \cdot 8 + 9 \cdot 8 \cdot 7$

53. Коефицијент уз y у развоју бинома $(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} - a^2)^{11}$ је:

- A) 462 Б) 165 В) -330 Г) -462 Д) 8